

TRƯỜNG ĐẠI HỌC THƯƠNG MẠI

# BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP

(DÙNG CHO SINH VIÊN HỌC CÁC HỆ KINH TẾ)

# Chương 1

## Ma trận và định thức

### BÀI TẬP

**Bài 1.1** Thực hiện các phép tính trên ma trận

a)  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -6 & -1 \\ 5 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

d)  $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$

e)  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$

f) Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Tính  $(2A + A^2)B$ .

2.  $B(2A + A^2)$  có thực hiện được không, tại sao?

**Bài 1.2** Tính  $x_1, x_2, x_3, x_4$  từ phương trình

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

**Bài 1.3** Tính các định thức sau:

$$1. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \end{vmatrix},$$

$$4. \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}.$$

$$2. \begin{vmatrix} 9 & 2 & 7 & 11 \\ 7 & 4 & 5 & 9 \\ 5 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix},$$

$$5. \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix},$$

**Bài 1.4** Tính các định thức sau:

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ & & \cdots & & \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

$$2. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ & & \cdots & & \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

**Bài 1.5** Chứng minh rằng:

$$1. \begin{vmatrix} x+y & xy & x^2+y^2 \\ y+z & yz & y^2+z^2 \\ z+x & zx & z^2+x^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx),$$

$$2. \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$3. \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & \cos \beta & \sin \beta \\ 1 & \cos \gamma & \sin \gamma \end{vmatrix} = 4 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{\beta-\gamma}{2} \sin \frac{\gamma-\alpha}{2},$$

5. Nếu các số có ba chữ số  $\overline{a_1a_2a_3}$ ,  $\overline{b_1b_2b_3}$ ,  $\overline{c_1c_2c_3}$  cùng chia hết cho 13 thì định thức

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

cũng chia hết cho 13.

**Bài 1.6** Tính hạng của các ma trận:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -3 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.7** Tính hạng của ma trận tùy theo giá trị của  $\lambda$ :

$$1. A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 & 1 \\ 9 & \lambda & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.8** Tìm giá trị của  $m$  để các ma trận sau có hạng nhỏ nhất, lớn nhất:

$$1. A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ 9 & 12 & m \end{pmatrix}, \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 1 - m^2 & -1 & 0 & m + 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.9** Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad 4. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$2. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$
$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 5. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.10** Xác định giá trị của  $\alpha$  để ma trận  $A$  khả nghịch, tìm ma trận nghịch đảo của  $A$ , với:

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & \sin \alpha \\ \sin \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha & 0 \\ 4 \cos \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.11** Giải các phương trình ma trận sau:

$$1. X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$3. X \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{pmatrix},$$

4.  $A.X.B = C$  trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

### ĐÁP SỐ

**Bài 1.1**

$$a) \begin{pmatrix} 16 & 18 & 16 & 38 \\ 43 & 24 & 73 & 74 \\ 5 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 78 \\ 72 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 36 & 2 \\ -16 & -8 \\ 22 & -6 \end{pmatrix}$$

**Bài 1.2**  $\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

**Bài 1.3**

1. 0,
2. -6,
3.  $(a - b)(b - c)(c - a)$ ,
4.  $(x + 3a)(x - a)^3$ ,
5. -18016.

**Bài 1.4** 1.  $n!$  2.  $2n + 1$ .

**Bài 1.6** 1.  $r = 4$ . 2.  $r = 3$ .

**Bài 1.7**

1.  $r(A) = \begin{cases} 2 & \text{khi } \lambda = -3 \\ 3 & \text{khi } \lambda \neq -3, \end{cases}$
2.  $r(A) = \begin{cases} 2 & \text{khi } \lambda = 3 \\ 3 & \text{khi } \lambda \neq 3. \end{cases}$

**Bài 1.8**

1.  $r(A) = \begin{cases} 1 & \text{khi } m = 6 \\ 2 & \text{khi } m \neq 6. \end{cases}$
2.  $r(A) = \begin{cases} 2 & \text{khi } m = \pm 1 \\ 3 & \text{khi } m \neq \pm 1. \end{cases}$

**Bài 1.9**

1.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,
2.  $A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -31 & 19 \\ 1 & -18 & 12 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ ,
3.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,
4.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,
5.  $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Bài 1.10**

1.  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,

$$A^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \begin{pmatrix} 1 & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \alpha \neq \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1 - 4\cos^2 \alpha} \begin{pmatrix} 1 & -\cos \alpha & 0 \\ -4\cos \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 4\cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

**Bài 1.11**

$$1. X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix},$$

$$3. X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2. X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$4. X = \begin{pmatrix} -19 & 38 \\ 11 & -19 \end{pmatrix}.$$

# Chương 2

## Vectơ và không gian vectơ

### BÀI TẬP

**Bài 2.1** Tìm  $x_1, x_2$  thoả mãn hệ thức

$$(x_1, 40) - (2x_1, -x_2) = -2(4, x_2).$$

**Bài 2.2** Tìm vectơ  $X$  từ phương trình:

$$3(A_1 - X) + 2(A_2 + X) = 5(A_3 + X),$$

với  $A_1 = (2, 5, 1, 3)$ ;  $A_2 = (10, 1, 3, 10)$ ;  $A_3 = (4, 1, -1, 1)$ .

**Bài 2.3** Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ vectơ.

- 1)  $X_1 = (0, 2, 0)$ ;  $X_2 = (1, -1, 0)$ ;  $X_3 = (0, 4, 0)$ ,
- 2)  $X_1 = (1, 0, 1)$ ;  $X_2 = (5, 6, 1)$ ;  $X_3 = (-5, -6, -1)$ ,
- 3)  $X_1 = (1, 2, 5)$ ;  $X_2 = (2, 0, 1)$ ,
- 4)  $X_1 = (1, -1, 1)$ ;  $X_2 = (3, 2, 0)$ ;  $X_3 = (5, 1, 0)$ ,
- 5)  $X_1 = (1, 0, 0)$ ;  $X_2 = (2, 3, -2)$ ;  $X_3 = (3, -3, 2)$ .

**Bài 2.4** Cho  $X_1 = (1, -1, 2, 0, 3)$ ;  $X_2 = (2, -3, 5, 1, -4)$ ;  $X_3 = (4, -5, 9, 1, m)$ ;  $X_4 = (2, -2, 4, m+1, 6)$ . Tìm hạng và xét tính độc lập, phụ thuộc tuyến tính của hệ 4 vectơ trên theo  $m$ .

**Bài 2.5** Cho  $X_1 = (1, 0, -1, 2, -2)$ ;  $X_2 = (2, 1, 0, 3, -5)$ ;  $X_3 = (5, 2, -1, 8, m - m^2)$ ;  $X_4 = (-3, -1, 1, -5, m + 3)$ . Tìm hạng và xét tính độc lập, phụ thuộc tuyến tính của hệ 4 vectơ trên theo  $m$ .



**Bài 2.6** Với giá trị nào của  $\lambda$  thì vectơ  $X$  là tổ hợp tuyến tính của hai vectơ  $X_1, X_2$ , biết rằng

$$X = (3, 0, \lambda - 6); X_1 = (1, 0, 0); X_2 = (5, 1, 2).$$

**Bài 2.7** Tìm hạng và một cơ sở của hệ vectơ

1)  $X_1 = (1, 0, 0); X_2 = (-1, 2, 6); X_3 = (1, 2, 10),$

2)  $X_1 = (3, -5, -5); X_2 = (1, 0, 0); X_3 = (5, 8, 8).$

**Bài 2.8** Ba vectơ  $a_1, a_2, a_3$  là một cơ sở trong không gian  $\mathbb{R}^3$ . Cho

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ b_2 &= a_2 + a_3 \\ b_3 &= a_2 - a_3 \end{aligned}$$

1) Hệ  $\{b_1, b_2, b_3\}$  độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

2) Tính hạng của hệ  $\{a_2, a_3, b_2, b_3\}$

**Bài 2.9** Ba vectơ  $A_1, A_2, A_3$  độc lập tuyến tính và

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1 + 4A_2 + 6A_3 \\ X_2 &= 3A_1 - 4A_2 - 6A_3. \\ X_3 &= A_1 \end{aligned}$$

Hệ  $\{X_1, X_2, X_3\}$  độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

**Bài 2.10** Biết hệ  $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$  là độc lập tuyến tính và

$$\begin{cases} X_1 = 2A_1 + 3A_2 - 4A_3 - A_4 \\ X_2 = A_1 - 2A_2 + A_3 + 3A_4 + 4A_5 \\ X_3 = 5A_1 - 3A_2 - A_3 + 9A_4 + 4A_5 \\ X_4 = 3A_1 + 8A_2 - 9A_3 - 5A_4 - 6A_5 \end{cases}$$

Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của hệ  $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ .

## ĐÁP SỐ

**Bài 2.1**  $x_1 = 8, x_2 = -\frac{40}{3}.$

**Bài 2.2**  $X = (1, 2, \frac{7}{3}, 4).$

**Bài 2.3**

- 1) Phụ thuộc tuyến tính,
- 2) Phụ thuộc tuyến tính,
- 3) Độc lập tuyến tính,
- 4) Độc lập tuyến tính,
- 5) Phụ thuộc tuyến tính.

$$\text{Bài 2.4 } r\{X_1, X_2, X_3, X_4\} = \begin{cases} 3 & \text{khi } m = -1 \text{ hoặc } m = 2, \\ 4 & \text{khi } -1 \neq m \neq 2. \end{cases}$$

$$\text{Bài 2.5 } r\{X_1, X_2, X_3, X_4\} = \begin{cases} 2 & \text{khi } m = 4, \\ 3 & \text{khi } m \neq 4. \end{cases}$$

$$\text{Bài 2.6 } \lambda = 6.$$

**Bài 2.7**

- 1)  $r = 3$ ,  $\{X_1, X_2, X_3\}$  là một cơ sở.
- 2)  $r = 2$ ,  $\{X_1, X_2\}$  là một cơ sở.

**Bài 2.8**

- 1) Độc lập tuyến tính.
- 2)  $r(a_2, a_3, b_2, b_3) = 2$ .

**Bài 2.9** Phụ thuộc tuyến tính.

**Bài 2.10** Hệ phụ thuộc tuyến tính.

# Chương 3

## Hệ phương trình tuyến tính

### BÀI TẬP

Bài 3.1 Giải các hệ phương trình

$$1. \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ -x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y - 6z = 6 \\ 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 16 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 8x + 5y + 2z = 8 \\ 9x + 3y + 4z = 9 \\ 5x + 3y + 2z = 7 \\ 7x + 8y + z = 12 \end{cases}$$

**Bài 3.2** Tìm nghiệm tổng quát và hai nghiệm riêng khác nhau của các hệ phương trình.

$$1. \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 13 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 4 \\ 14x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -8 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 37 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = -11 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 5 \end{cases}$$

**Bài 3.3** Tìm  $a$  để hệ có nghiệm duy nhất

$$1. \begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 5y + az = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -x - 2y + 4z = 4 \\ -2x + y + az = 8 \\ -x + 8y + 6z = 2 \\ 5y + (10 - a)z = -2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} ax_2 + ax_3 + ax_4 = 1 \\ -ax_1 + ax_3 + ax_4 = -1 \\ -ax_1 - ax_2 + ax_4 = 2 \\ -ax_1 - ax_2 - ax_3 = -2 \end{cases}$$

**Bài 3.4** Tìm  $k$  để hệ vô nghiệm

$$1. \begin{cases} (k+1)x + y + z = 1 \\ x + (k+1)y + z = k \\ x + y + (k+1)z = k^2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 - (k-1)x_4 = 3 \end{cases}$$

**Bài 3.5** Giải các hệ phương trình thuần nhất

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 13x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

**Bài 3.6** Với giá trị nào của  $m$  thì hệ phương trình có nghiệm không tầm thường

$$1. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ x + 4y + 2mz = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 8x_1 + 9x_2 + 9x_3 + mx_4 = 0 \end{cases}$$

**Bài 3.7** Với giá trị nào của  $a$  thì hệ phương trình có vô số nghiệm

$$1. \begin{cases} 3x + y - 2z = a \\ 2x + 4y - z = -2 \\ 4x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + (a^2 - 6)x_3 - 6x_4 = 8 + a \end{cases}$$

**Bài 3.8** Tìm  $a$  và  $b$  để hệ phương trình sau có vô số nghiệm

$$1. \begin{cases} x + 2y + az = 3 \\ 3x - y - az = 2 \\ 2x + y + 3z = b \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + az = 2 \\ 2x + 3y + (6 + 2a)z = 6 \\ 3x - y + 3z = b \\ 2x - 3y - (3 + a)z = b - 4 \end{cases}$$

**Bài 3.9** Với giá trị nào của  $m$  thì hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 3 - m \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \end{cases}$$

**Bài 3.10** Biện luận về nghiệm số của hệ phương trình sau theo tham số  $k$

$$1. \begin{cases} 4x + y + z = 3 \\ 3x - y + z = 2 \\ 5x - 4y + 2z = 3 \\ x + (k^2 - 2)y = k - 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} (2k + 1)x - ky + (k + 1)z = k - 1 \\ (k - 2)x + (k - 1)y + (k - 2)z = k \\ (2k - 1)x + (k - 1)y + (2k - 1)z = k \end{cases}$$

**Bài 3.11** Biện luận về nghiệm số và giải các hệ phương trình sau

$$1. \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + az = -1 \\ 4x + y + (3 - a)z = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} kx + ky + (k + 1)z = k \\ kx + ky + (k - 1)z = k \\ (k + 1)x + ky + (2k + 3)z = 1 \end{cases}$$

**Bài 3.12** Tính  $x_1, x_2, x_3$ . Biết rằng:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Bài 3.13** Cho

$$\begin{aligned}X_1 &= (2, 3, 5, -4, 1) \\X_2 &= (1, -1, 2, 3, 5) \\X_3 &= (1, -1, 1, -2, 3) \\X_4 &= (3, 7, 8, -11, -3)\end{aligned}$$

1. Chứng minh rằng  $\{X_1, X_2, X_3\}$  là một cơ sở của hệ bốn vectơ trên.
2. Biểu diễn tuyến tính vectơ  $X_4$  qua ba vectơ còn lại.

**Bài 3.14** Cho

$$\begin{aligned}X_1 &= (1, 2, 4) \quad , \quad X_2 = (-1, 0, 2) \\X_3 &= (1, 4, 10) \quad , \quad X_4 = (2, 2, 1)\end{aligned}$$

1. Tính hạng của hệ bốn vectơ trên.
2. Biết rằng:  $A_1 = X_1, A_2 = X_1 + X_3, A_3 = X_1 + X_2 - X_4$ . Hãy biểu diễn tuyến tính  $X_3$  qua các vectơ  $A_1, A_2, A_3$ .

**Bài 3.15** Cho

$$\begin{aligned}X_1 &= (2, 3, 3, 4) \\X_2 &= (1, 0, -1, 1) \\X_3 &= (-4, -1, 3, -2) \\X_4 &= (-3, -1, 0, -3) \\X_5 &= (-4, -3, 1, 2)\end{aligned}$$

1. Tìm một cơ sở của không gian  $\mathbb{R}^4$  trong 5 vectơ trên
2. Biểu diễn tuyến tính  $X_5$  qua bốn vectơ còn lại.

**Bài 3.16** Với giá trị nào của  $\lambda$  thì vectơ  $X = (3, 5, 1)$  là tổ hợp tuyến tính của ba vectơ

$$X_1 = (2, 5, 3), X_2 = (4, 7, 2), X_3 = (6, \lambda, 5)$$

**Bài 3.17** Biện luận theo tham số  $\lambda$  về khả năng biểu diễn vectơ  $X$  qua các vectơ  $A_1, A_2, A_3$ . Biết rằng

1.  $X = (1, 2, \lambda - 1); A_1 = (3, 2, 5), A_2 = (2, 4, -4), A_3 = (5, 6, \lambda^2)$
2.  $X = (\lambda, 2, 5); A_1 = (3, 2, 6), A_2 = (7, 3, 9), A_3 = (5, 1, 5)$

## ĐÁP SỐ

### Bài 3.1

1.  $X^0 = (3, 2, 1)$
2. 
$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = \text{tùy ý} \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = -3 + x_2 \end{cases}$$
3. Hệ vô nghiệm
5.  $X^0 = (1, -1, 1, -1, 1)$
4.  $X^0 = (1, -1, 0, -2)$
6.  $X^0 = (-1, 2, 3)$

### Bài 3.2

1. 
$$\begin{cases} x_2 = 6x_1 \\ x_3 = -7 \\ x_4 = \frac{13}{3} - \frac{8}{3}x_1 \end{cases}, \quad x_1 \text{ tùy ý}$$

Hai nghiệm riêng  $X^0 = (0, -7, \frac{13}{3})$ ;  $X^1 = (1, 6, -7, \frac{5}{3})$

2. 
$$\begin{cases} x_1 = -16 + \alpha + \beta + 5\gamma \\ x_2 = 23 - 2\alpha - 2\beta - 6\gamma \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases} \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ tùy ý})$$

Hai nghiệm riêng

$$X^0 = (-16, 23, 0, 0, 0); X^1 = (-15, 21, 1, 0, 0)$$

### Bài 3.3

1.  $a \neq -\frac{1}{2}$
2.  $a \neq 9$
3.  $a \neq 0$

### Bài 3.4

1.  $k = 0$  hoặc  $k = -3$
2.  $k = -8$

### Bài 3.5

1. Nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường



$$2. \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma \\ x_2 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta - \frac{3}{2}\gamma \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ tùy ý}$$

### Bài 3.6

1.  $m = 2$
2. Không có giá trị nào của  $m$  để hệ có nghiệm không tầm thường

### Bài 3.7

$$1. a = -\frac{1}{2} \qquad 2. a = 4$$

$$\text{Bài 3.8} \quad 1. \begin{cases} a = \frac{21}{2} \\ b = 3 \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} a = 9 \\ b = -2 \end{cases}$$

### Bài 3.9 $m = 5$

### Bài 3.10

1. (a)  $k \neq \pm 2$  hệ có nghiệm duy nhất,  
 (b)  $k = 2$  hệ có vô số nghiệm,  
 (c)  $k = -2$  hệ vô nghiệm.
2. (a)  $\begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq -3 \end{cases}$  hệ có nghiệm duy nhất,  
 (b)  $k = 1$  hệ có vô số nghiệm,  
 (c)  $k = -3$  hệ vô nghiệm.
3. (a)  $\begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq \pm 1 \end{cases}$  hệ có nghiệm duy nhất,  
 (b)  $k = -1$  hệ có vô số nghiệm,  
 (c)  $k = 1$  hệ vô nghiệm,  $k = 0$  hệ vô nghiệm.

### Bài 3.11

1. (a)  $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -2 \end{cases}$  hệ có nghiệm duy nhất là

$$x = y = z = \frac{1}{a+2},$$

(b)  $a = -2$  hệ vô nghiệm,

(c)  $a = 1$  hệ có vô số nghiệm, nghiệm tổng quát là

$$x = 1 - y - z \quad (\text{với } y, z \text{ tùy ý})$$

2. (a)  $a \neq -\frac{1}{2}$  hệ có nghiệm duy nhất

$$X^0 = \left( \frac{2}{2a+1}, -\frac{1}{2a+1}, -\frac{2}{2a+1} \right)$$

(b)  $a = -\frac{1}{2}$  hệ vô nghiệm.

3. (a)  $k \neq 0$  hệ có nghiệm duy nhất  $X^0 = (1 - k, k, 0)$

(b)  $k = 0$  hệ có vô số nghiệm, nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} \quad \alpha \text{ lấy tùy ý.}$$

**Bài 3.12**  $x_1 = -39, x_2 = 19, x_3 = -3$

**Bài 3.13**  $X_4 = 2X_1 - X_2 + 0X_3$

**Bài 3.14**

1.  $r(X_1, X_2, X_3, X_4) = 3$

2.  $X_3 = A_1 + \frac{1}{2}A_2 + 0A_3$

**Bài 3.15**

1.  $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$  là một cơ sở.

2.  $X_5 = 0X_1 + 8X_2 + 3X_3 + 0X_4$ .

**Bài 3.16**  $\lambda \neq 12$

**Bài 3.17**

1. (a)  $\lambda \neq \pm 1$  biểu diễn được một cách duy nhất.  
(b)  $\lambda = 1$  không biểu diễn được.  
(c)  $\lambda = -1$  biểu diễn được nhưng không duy nhất.
2. Biểu diễn được một cách duy nhất với mọi  $\lambda$ .

# Chương 4

## Dạng toàn phương

### BÀI TẬP

**Bài 4.1** Xét tính xác định dấu, đổi dấu của dạng toàn phương:

1.  $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_3^2$
2.  $F(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 7x_2^2$
3.  $F(x_1, x_2, x_3) = -6x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2$
4.  $F(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1 + x_2)^2 + 10x_3^2$
5.  $F(x_1, x_2, x_3) = 6x_2x_3$

**Bài 4.2** Xét tính xác định dấu, đổi dấu của dạng toàn phương:

1.  $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_1x_3$
2.  $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$
3.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_4$
4.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 10x_3^2 - 4x_4^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_4 - 8x_2x_3$

**Bài 4.3** Xác định giá trị của tham số  $m$  để dạng toàn phương a) xác định dương; b) nửa xác định dương:

1.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_4^2 + 2mx_1x_3 - 4x_1x_4$
2.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_3^2 + 5mx_4^2 + 2x_2x_3 - 6x_1x_3$
3.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = mx_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 + 7x_4^2 + 2mx_1x_3 - 4x_2x_3$

**Bài 4.4** Xác định giá trị tham số  $m$  để dạng toàn phương  
a) xác định dương; b) không suy biến.

1.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = mx_1^2 + 2mx_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 5x_4^2$

2.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 2mx_2x_3 + 5x_4^2$

3.  $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3mx_2^2 + (m - 1)x_3^2 + 2x_1x_2$

**Bài 4.5** Đưa dạng toàn phương về dạng toàn phương chính tắc, chuẩn tắc bằng phương pháp Lagrange hoặc Jacobi.

1.  $F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3$

2.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 + 7x_4^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

3.  $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 7x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3$

4.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_4^2 + 4x_2x_3 - 4x_2x_4$

5.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_2x_4 + 10x_4^2$

6.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_2x_4 + 10x_4^2 + 2x_1x_5 - x_5^2$

7.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_1x_3 - 5x_4^2 + 12x_2x_3$

8.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = -4x_1x_2 + 6x_2x_3 + 10x_3x_4$

**Bài 4.6** Tìm các giá trị riêng và đưa dạng toàn phương về dạng toàn phương chính tắc.

1.  $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2$

2.  $F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

3.  $F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3$

4.  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4$

**Bài 4.7** (Tham khảo) Tìm phương trình chính tắc, nhận dạng đường cong bậc hai.

1.  $2xy + 4x - 5 = 0$

2.  $2x^2 + 8xy + 8y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$

3.  $3x^2 + 2y^2 + 4x + 6y - 10 = 0$

4.  $16x^2 + 9y^2 - 24xy - 12x + 8y - 30 = 0$

### ĐÁP SỐ

**Bài 4.1** 1) Xác định dương. 2) Nửa xác định âm. 3) Đổi dấu. 4) Nửa xác định dương. 5) Đổi dấu.

**Bài 4.2** 1) Đổi dấu. 2) Xác định dương. 3) Xác định dương. 4) Xác định âm.

### Bài 4.3

1. Xác định dương khi  $-\sqrt{8} < m < \sqrt{8}$ . Nửa xác định dương khi  $-\sqrt{8} \leq m \leq \sqrt{8}$ .
2. Xác định dương khi  $m > 0$ . Nửa xác định dương khi  $m \geq 0$ .
3. Xác định dương khi  $0 < m < 3/7$ . Nửa xác định dương khi  $0 \leq m \leq 3/7$ .

### Bài 4.4

1. Xác định dương khi  $m > \sqrt{2}$ . Không suy biến khi  $m \neq \pm\sqrt{2}$ .
2. Xác định dương khi  $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$ . Không suy biến khi  $m \neq \pm\sqrt{6}$ .
3. Xác định dương khi  $m > 1$ . Không suy biến khi  $\frac{1}{3} \neq m \neq 1$ .

### Bài 4.5 (Dạng chuẩn tắc)

1.  $G(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2$ .
2.  $G(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$ .
3.  $G(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ .
4.  $G(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$ .
5.  $G(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$ .
6.  $G(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - y_5^2$ .
7.  $G(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 - y_3^2 - y_4^2$ .
8.  $G(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$ .

**Bài 4.6**

1.  $\lambda = 0; \lambda = \pm 2; G(y_1; y_2; y_3) = y_1^2 - y_2^2.$

2.  $\lambda = -1; 2; 5; G(y_1; y_2; y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$

3.  $\lambda = 3; 3 \pm \sqrt{5}; G(y_1; y_2; y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$

4.  $\lambda = 3; 0; (1 \pm \sqrt{21})/2; G(y_1; y_2; y_3; y_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 0 \cdot y_4^2.$

**Bài 4.7** 1)  $u^2/5 - v^2/5 = 1;$  2)  $v^2 = 2 \cdot \frac{1}{25}u;$  3)  $18u^2/95 + 12v^2/95 = 1;$

4)  $v^2 = 2 \cdot \frac{5}{264}u.$

# Chương 5

## Hàm số, giới hạn và sự liên tục

### BÀI TẬP

**Bài 5.1** Cho  $f(x) = \left[ \operatorname{arccot} \left( \lg \frac{x}{10} \right) \right]$ .

Tính  $f(10)$ ;  $f(10^{1+\sqrt{3}})$ ;  $f(10^{1-\sqrt{3}})$ ;  $f(100)$ .

**Bài 5.2** Tính các giá trị:

1)  $\cos[\arcsin(-0,1)]$ ; 2)  $\arcsin[\cos(\pi - \frac{\pi}{180})]$ ; 3)  $\arccos[\cos \frac{5\pi}{4}]$ ;

4)  $\arccos[\cos(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{90})]$ .

**Bài 5.3** Tìm tập xác định của các hàm sau:

1.  $y = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 1)}$

6.  $y = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} + \ln(25 - x^2)$

2.  $y = \frac{1}{\sqrt{|x+2| - (x+2)}}$

7.  $y = \lg[1 - \lg(x^2 - 5x + 16)]$

3.  $y = \frac{1}{2|x| + |x-1| - 3}$

8.  $y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{3}}$

4.  $y = \frac{1}{\sqrt{2x-5}} + \arcsin \frac{2x+1}{x-2}$

9.  $y = \log_x 2 + \sqrt{\pi - 6 \arcsin x}$

5.  $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x - \cos x}}$

10.  $y = \lg x + \sqrt{\pi - 4 \arctan x}$

**Bài 5.4** Tìm các giới hạn sau:



$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{4x^3 + 2x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

**Bài 5.5** Tìm các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[5]{x^3 + 1}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x} \right)$$

**Bài 5.6** Tìm các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \arcsin(x-1)}{3x-3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

**Bài 5.7** Tìm các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{m}{x} \right)^x, \quad (m = \text{const})$$

**Bài 5.8** Tìm các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + \alpha x)}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( a^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}, (\alpha \neq \beta)$

**Bài 5.9** Tìm các giới hạn sau:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 2x + 3)}{\ln(x^2 + 5x + 7)}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\sin^2 x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cos \frac{1}{x^2}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$  trong đó  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài 5.10** Tìm các giới hạn một phía sau:

1.  $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{1}{e^x - a}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin \pi x}{|x|}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \arctan \frac{1}{x - 1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} x \ln \left( 1 + e^{\frac{1}{x}} \right)$

**Bài 5.11** Tìm các giới hạn sau bằng cách thay thế các VCB tương đương

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \sin 5x}{(x - x^3)^2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arcsin x}{x \tan^2 x}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \ln x}{\arctan^2(x - 1)}$

**Bài 5.12** Xét sự liên tục của các hàm sau

1.  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$
2.  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2x^2 - 3x + 2 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$

**Bài 5.13** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Tìm  $a$  để hàm số đã cho liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

**Bài 5.14** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & \text{khi } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A \sin x + B & \text{khi } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{khi } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Tìm  $A, B$  để hàm số đã cho liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

**Bài 5.15** Xác định  $f(1)$  để hàm số sau liên tục trên  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{khi } x \neq 1, \\ f(1) & \text{khi } x = 1. \end{cases}$$

## ĐÁP SỐ

**Bài 5.1**  $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \operatorname{arccot} 2$ .

**Bài 5.2** 1)  $\sqrt{0,99}$ ; 2)  $-\frac{89\pi}{180}$ ; 3)  $\frac{3\pi}{4}$ ; 4)  $\frac{137\pi}{180}$ .

**Bài 5.3**

- $(-\infty; -2/\sqrt{3}] \cup [2/\sqrt{3}; +\infty)$
- $(-\infty; -2)$
- $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right\}$
- $\emptyset$
- $\left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$
- $\left( -5; -\frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$
- $(2; 3)$
- $\left[ \frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right]$
- $\left( 0; \frac{1}{2} \right)$
- $(0; 1)$

**Bài 5.4**

1.  $\frac{1}{2}$
2.  $\frac{1}{8}$
3.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
4.  $\frac{2}{3}$

**Bài 5.5**

1. 1
2. 1 khi  $x \rightarrow +\infty$ ,  $-1$  khi  $x \rightarrow -\infty$
3. 1
4.  $\frac{1}{2}$  khi  $x \rightarrow +\infty$ ,  $-\frac{1}{2}$  khi  $x \rightarrow -\infty$

**Bài 5.6**

1.  $-\sqrt{2}$
2.  $\frac{2}{\pi}$
3.  $\frac{2}{3}$
4.  $\frac{1}{2}$

**Bài 5.7**

1.  $\frac{1}{e}$
2.  $e$
3.  $e$
4. 1

**Bài 5.8**

1.  $\frac{\alpha}{\ln 2}$
2.  $\ln a$
3.  $\alpha - \beta$
4. 1

**Bài 5.9**

1. 1
2.  $\infty$
3. 0
4.  $\infty$  khi  $m > n$ ,  $\frac{a_0}{b_0}$  khi  $m = 1$ , 0 khi  $m < n$ .

**Bài 5.10**

1.  $+\infty, 0$
2.  $\pi, -\pi$
3.  $\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
4.  $1, 0$

**Bài 5.11**

1. 15
2. 1
3.  $\frac{1}{2}$
4. 1

**Bài 5.12**

1. Liên tục tại  $\forall x \neq 0$ , gián đoạn tại  $x = 0$ .
2. Liên tục tại  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Bài 5.13**  $a = 1$

**Bài 5.14**  $A = -1, B = 1$

**Bài 5.15**  $f(1) = \frac{2}{3}$

# Chương 6

## Đạo hàm và vi phân hàm một biến

### BÀI TẬP

**Bài 6.1** Tính đạo hàm của các hàm số:

1.  $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

2.  $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

3.  $y = \arctan \frac{x + 4}{1 - 4x}$

4.  $y = \log_3(x^2 - \sin x)$

5.  $y = e^x \ln(\sin x)$

6.  $y = \frac{1}{2} \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin x}$

7.  $y = x^x$

8.  $y = \ln \sqrt[4]{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

**Bài 6.2** Tính  $f'(0^+)$  và  $f'(0^-)$  của các hàm số

1.  $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ .

2.  $f(x) = \sqrt{\arctan 4x^2}$ .

**Bài 6.3** Xét tính khả vi trên  $\mathbb{R}$  của các hàm số

1.  $y = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 + \sin x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$
2.  $y = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{khi } x > 0 \\ \sin x + \cos x - 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$
3.  $y = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ e^x - 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$
4.  $y = |x - 2|\varphi(x)$ , với  $\varphi(x)$  là hàm liên tục tại  $x = 2$ , khả vi trên  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  và  $\varphi(2) \neq 0$ .
5.  $y = x\sqrt[3]{x^2 - 1}$ .
6.  $y = \arctan(x - 1)\sqrt[3]{x^2 - 1}$ .
7.  $y = \sin x\sqrt[3]{x}$ .

**Bài 6.4** Cho hàm số

$$y = \begin{cases} e^{ax} & \text{khi } x \geq 0 \\ \sin x + b & \text{khi } x < 0, \text{ với } a, b \text{ là các tham số} \end{cases}$$

Tìm các giá trị của tham số  $a, b$  để hàm số trên khả vi tại  $x = 0$ .

**Bài 6.5** Tìm giá trị của  $a$  để hàm số sau khả vi tại  $x = 0$

$$y = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{khi } x \geq 0 \\ \sin x + a \cos x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

**Bài 6.6** Với điều kiện nào của  $n \in \mathbb{Z}^+$  để hàm số

$$y = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

1. liên tục tại  $x = 0$ ,
2. khả vi tại  $x = 0$ ,
3. có đạo hàm liên tục tại  $x = 0$ .

**Bài 6.7** Tính đạo hàm cấp  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ) của các hàm số:

1.  $y = \frac{1}{x(1-x)}$
2.  $y = e^{ax} \sin(bx + c)$
3.  $y = \ln(1 + 3x)$

**Bài 6.8** Tính gần đúng giá trị các biểu thức bằng vi phân

1.  $\sqrt[3]{16,01000}$ , (Bỏ qua sai số nhỏ hơn 0,00001).
2.  $\arcsin(1 - \sin 29^\circ)$  với  $\pi = 3,1416$ , (Bỏ qua sai số nhỏ hơn 0,0001).
3.  $\arctan(2 - \sqrt[100]{e})$  với  $\pi = 3,1416$ .
4.  $\sqrt{0,9500} \arctan 0,9500$ .

**Bài 6.9** Tính các giới hạn:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\sin 5x)}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \tan \frac{\pi x}{4}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln \left( \cos \frac{\pi x}{2} \right)$
7.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cotan x - \frac{1}{x^2} \right)$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{4}{1 + \ln x}$



$$11. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2x-\pi}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arctan x}{x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

**Bài 6.10** Tìm cực trị của các hàm số:

$$1. y = x \sqrt[3]{(1-2x)^2}$$

$$2. y = x + 3\sqrt[3]{x^2}$$

$$3. y = \frac{x}{e^x}$$

$$4. y = x \ln^2 x$$

$$5. y = \frac{e^x}{x+1}$$

$$6. y = (x+1) \sqrt[3]{x^2-1}$$

$$7. y = x \sqrt[5]{x^2-1}$$

## ĐÁP SỐ

**Bài 6.1**

$$1. \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}};$$

$$5. e^x \left( \ln(\sin x) + \frac{\cos x}{\sin x} \right);$$

$$2. \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$6. \frac{1}{\sin^3 x};$$

$$3. \frac{1}{1+x^2};$$

$$7. x^x (\ln x + 1);$$

$$4. \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x) \ln 3};$$

$$8. -\frac{1}{2 \sin x}.$$

**Bài 6.2** 1.  $f'(0^+) = 1;$   $f'(0^-) = -1.$

$$2. f'(0^+) = 2; \quad f'(0^-) = -2.$$

**Bài 6.3**

1. Khả vi  $\forall x (f'(0) = 1)$ .
2. Khả vi  $\forall x (f'(0) = 1)$ .
3. Khả vi  $\forall x \neq 0$ . Tại  $x = 0$  hàm không khả vi.
4. Khả vi  $\forall x \neq 2$ . Tại  $x = 2$  hàm không khả vi.
5. Không khả vi tại  $x = \pm 1$ .
6. Khả vi trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .
7. Khả vi trên  $\mathbb{R}$ .

**Bài 6.4**  $a = 1, b = 1$ **Bài 6.5**  $a = 0$ **Bài 6.6** 1.  $n \geq 1$       2.  $n \geq 2$       3.  $n \geq 3$ **Bài 6.7**

1.  $n! \left[ \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right]$
2.  $e^{ax}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx + c + n\varphi)$   
 với  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  và  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
3.  $\frac{(-1)^{n+1} 3^n (n-1)!}{(1+3x)^n}$

**Bài 6.8**

- |             |            |
|-------------|------------|
| 1. 4,00125. | 3. 0,7804. |
| 2. 0,5175.  | 4. 0,740.  |

**Bài 6.9**

- |      |                    |
|------|--------------------|
| 1. 6 | 3. $\frac{1}{2^7}$ |
| 2. 1 |                    |

4. 1

9. 1

5.  $-\frac{16}{\pi}$

10.  $e^4$

6. 0

11. 1

7.  $\frac{1}{2}$

12.  $e^{\frac{1}{6}}$

8.  $\infty$

13.  $e^{\frac{1}{3}}$

**Bài 6.10**

1.  $y_{ct} = y(\frac{1}{2}) = 0; y_{cd} = y(\frac{3}{10}) = \frac{3}{10} \sqrt[3]{\frac{4}{25}}$

2.  $y_{cd} = y(-8) = 4; y_{ct} = y(x=0) = 0$

3.  $y_{cd} = y(1) = \frac{1}{e}$

4.  $y_{cd} = y(\frac{1}{e^2}) = \frac{4}{e^2}; y_{ct} = y(1) = 0$

5.  $y_{ct} = y(0) = e$

6.  $y_{ct} = y(\frac{3}{5}) = -\frac{8}{5} \sqrt[3]{\frac{16}{25}}; y_{cd} = y(-1) = 0$

7.  $y_{ct} = y(\sqrt{\frac{5}{7}}) = -\sqrt{\frac{5}{7}} \sqrt[5]{\frac{2}{7}}; y_{cd} = y(-\sqrt{\frac{5}{7}}) = \sqrt{\frac{5}{7}} \sqrt[5]{\frac{2}{7}}$

# Chương 7

## Hàm hai biến

### BÀI TẬP

**Bài 7.1** Tìm tập xác định và minh họa bằng hình học trên hệ tọa độ trục chuẩn  $Oxy$ :

1.  $z = \ln(2x - 1)(4 - y^2)$
2.  $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + \lg(x^2 + y^2 - 4)$
3.  $z = \arcsin \frac{3y + 2}{x}$
4.  $z = \arcsin \frac{2y}{x} + \arccos(y - 4x)$
5.  $z = \arcsin(3x - 4y); x \leq 2; y \geq -3$

**Bài 7.2** Tính các đạo hàm riêng cấp một

1.  $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
2.  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$
3.  $z = e^{\arctan \frac{y}{x}}$
4.  $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$
5.  $z = x^{y^3}$

$$6. z = \arctan \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$7. z = (x + y)^{\sin x \cdot \sin y}$$

**Bài 7.3** Tìm các đạo hàm riêng cấp hai của hàm hai biến

$$1. z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$$

$$2. z = x^2 \ln(x + y)$$

$$3. z = x^y$$

$$4. z = \ln(xy + \sqrt{x^2 y^2 + a^2})$$

**Bài 7.4** Tính gần đúng bằng vi phân toàn phần:

$$1. A = (0,996)^{5,050}$$

$$2. B = \ln(\sqrt[3]{27,0200} + \sqrt[4]{15,9700} - 4)$$

$$3. C = \arcsin(1,52 - \sqrt[100]{e}), \quad \text{biết } \sqrt{3} \cong 1,72; \pi \cong 3,14$$

$$4. D = \arctan 2(\sqrt{2,98} - \cos 31^0), \quad \text{biết } \sqrt{3} \cong 1,72; \pi \cong 3,14$$

**Bài 7.5** Tính  $y'_x$  và  $x'_y$  từ các hệ thức:

$$1. e^{-x^2 - y^2} + 2 \sin xy = 0.$$

$$2. \sin x + 3 \cos y + e^{4x - 5y} - 1 = 0.$$

**Bài 7.6** 1. Cho  $e^{xy} + x^y = 1 + e$ , tính  $y'_x \Big|_{(1;1)}$ .

2. Cho  $e^x + y^2 - 5 = 0$ , tính  $y'_x \Big|_{(0;2)}$ ;  $y'_x \Big|_{(0;-2)}$ .

**Bài 7.7** Tính các đạo hàm riêng của  $z$  theo  $x$  và theo  $y$ :

$$1. e^{x+2y+3z} + 4x + 5y + 6z = 0.$$

$$2. e^{xyz} + xyz = 0.$$

**Bài 7.8** .

1. Cho  $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ , tính  $z'_x \Big|_{(1;1;2)}$ ;  $z'_x \Big|_{(1;1;-2)}$ .

2. Cho  $xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 2$ , tính  $z'_x \Big|_{(0;1;1)}$ ;  $z'_x \Big|_{(0;-1;1)}$ .

**Bài 7.9** Tìm cực trị của hàm hai biến

1.  $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

2.  $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

3.  $z = x + y - x.e^y$

4.  $z = xy + \frac{20}{x} + \frac{50}{y}$

**Bài 7.10** Tìm cực trị có điều kiện:

1.  $z = x + y$  với  $x^2 + y^2 = 8$ .

2.  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  với  $x + y = 2$ .

3.  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  với  $x - y = 0$ .

4.  $z = x^2 + (y - 1)^2$  với  $(x - 1)^2 + y^2 = 8$ .

5.  $z = x + 2y + 1$  với  $x^2 + y^2 = 8$ .

6.  $z = e^{-x^2-y^2}$  với  $x + y = 2$ .

7.  $z = e^{-x^2-y^2}$  với  $x - y = 2$ .

8.  $z = x^4 + y^4$  với  $x - y = 2$ .

### ĐÁP SỐ

**Bài 7.1** 1.  $\begin{cases} x > 0,5 \\ -2 < y < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0,5 \\ y < -2 : y > 2 \end{cases}$

2.  $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$

3.  $\begin{cases} x > 0 \\ -(x+2)/3 \leq y \leq (x-2)/3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ (x-2)/3 \leq y \leq -(x+2)/3 \end{cases}$

$$4. \begin{cases} x < 0 \\ x/2 \leq y \leq -x/2 \\ 4x - 1 \leq y \leq 4x + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ -x/2 \leq y \leq x/2 \\ 4x - 1 \leq y \leq 4x + 1; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x \leq 2 \\ y \geq -3 \\ (3x - 1)/4 < y < (3x + 1)/4 \end{cases}$$

### Bài 7.2

$$1. \begin{aligned} z'_x &= \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ z'_y &= \frac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$2. z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; z'_y = \frac{y}{x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$3. z'_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} e^{\arctan \frac{y}{x}}; z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2} e^{\arctan \frac{y}{x}}$$

$$4. z'_x = -\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}; z'_y = -\frac{2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$5. z'_x = y^3 \cdot x^{y^3-1}; z'_y = 3y^2 \cdot x^{y^3} \ln x$$

$$6. z'_x = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4 - y^4}}; z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^4 - y^4}}$$

$$7. \begin{aligned} z'_x &= (x + y)^{\sin x \sin y} \left[ \cos x \sin y \ln(x + y) + \frac{\sin x \sin y}{x + y} \right] \\ z'_y &= (x + y)^{\sin x \sin y} \left[ \cos y \sin x \ln(x + y) + \frac{\sin x \sin y}{x + y} \right] \end{aligned}$$

### Bài 7.3

$$1. \begin{aligned} z''_{xx} &= \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z''_{xy} &= \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z''_{yy} &= \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$2. z''_{xx} = 2 \ln(x+y) + \frac{2x}{x+y} + \frac{x^2 + 2xy}{(x+y)^2}$$

$$z''_{xy} = \frac{2x}{x+y} + \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

$$z''_{yy} = \frac{-x^2}{(x+y)^2}$$

$$3. z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$z''_{xy} = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$$

$$z''_{yy} = x^y \ln^2 x$$

$$4. z''_{xx} = \frac{-xy^3}{(x^2y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z''_{xy} = \frac{a^2}{(x^2y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z''_{yy} = \frac{-yx^3}{(x^2y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

**Bài 7.4** 1.  $A \cong 0,980$

2.  $B \cong -0,0002$

3.  $C \cong 0,54$

4.  $D \cong 0,53$

**Bài 7.5** 1.  $y'_x = \frac{-xe^{-x^2-y^2} + y \cos xy}{ye^{-x^2-y^2} - x \cos xy}; x'_y = (y'_x)^{-1}$

2.  $y'_x = \frac{\cos x + 4e^{4x-5y}}{3 \sin y + 5e^{4x-5y}}; x'_y = (y'_x)^{-1}$

**Bài 7.6** 1.  $y'_x|_{(1;1)} = -1 - 1/e$ .

2.  $y'_x|_{(0;2)} = -1/2; y'_x|_{(0;2)} = 1/2$ .

**Bài 7.7** 1.  $z'_x = -\frac{e^{x+2y+3z} + 4}{3e^{x+2y+3z} + 6}; z'_y = -\frac{2e^{x+2y+3z} + 5}{3e^{x+2y+3z} + 6}$

2.  $z'_x = -\frac{z}{x}; z'_y = -\frac{z}{y}$

**Bài 7.8** 1.  $z'_x|_{(1;1;2)} = -3/2; z'_x|_{(1;1;-2)} = 3/2$



2.  $z'_x|_{(0;1;1)} = -1/2; \quad z'_x|_{(0;-1;1)} = 1/2$

**Bài 7.9**

1.  $z_{cd} = 9$ , đạt tại  $(2; -2)$ .
2.  $z_{ct} = -9/8$ , đạt tại các điểm  $(-1/2; -1), (1/2; -1); (-1/2; 1); (1/2; 1)$ .
3. Không có cực trị
4.  $z_{ct} = 30$ , đạt tại  $(2; 5)$ .

**Bài 7.10** 1. Cực đại có điều kiện đạt tại  $(2; 2); z_{cd} = z(2; 2) = 4$ ; Cực tiểu có điều kiện đạt tại  $(-2; -2); z_{ct} = z(-2; -2) = -4$ .

2. Cực tiểu có điều kiện đạt tại  $(1; 1); z_{ct} = z(1; 1) = -1$ .
3. Cực đại có điều kiện đạt tại  $(0; 0); z_{cd} = z(0; 0) = 0$ ; Cực tiểu có điều kiện đạt tại  $(1; 1); z_{ct} = z(1; 1) = -1$ .
4. Cực đại có điều kiện đạt tại  $(3; 2); z_{cd} = z(3; 2) = 10$ .
5. Cực đại có điều kiện đạt tại  $(1; 2); z_{cd} = z(1; 2) = 6$ ; Cực tiểu có điều kiện đạt tại  $(-1; -2); z_{ct} = z(-1; -2) = -4$ .
6. Cực đại có điều kiện đạt tại  $(1; 1); z_{cd} = z(1; 1) = e^{-2}$ .
7. Cực đại có điều kiện đạt tại  $(1; -1); z_{cd} = z(1; -1) = e^{-2}$ .
8. Cực tiểu có điều kiện đạt tại  $(1; -1); z_{ct} = z(1; -1) = 2$ .

# Chương 8

## Phép tính tích phân

### BÀI TẬP

**Bài 8.1** Tính các tích phân:

$$1. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

$$2. \int \frac{\sqrt{3x + 5}}{x} dx$$

$$3. \int \frac{1 + x - x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} dx$$

$$4. \int \frac{\sin 4x}{\cos^2 2x + 4} dx$$

$$5. \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

$$6. \int \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$$

$$7. \int x^3 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$$

$$9. \int \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} \frac{dx}{x^2}$$

$$10. \int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x} dx$$

**Bài 8.2** Tính các tích phân:

$$1. \int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx$$

$$2. \int \frac{dx}{\sin^6 x}$$

$$3. \int \tan^5 x dx$$

$$4. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$5. \int \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$7. \int \frac{\sqrt{(9 - x^2)^3}}{x^6} dx$$

$$8. \int \frac{dx}{(x^2 + 4)\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$9. \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$10. \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

**Bài 8.3** Tính các tích phân:

$$1. \int x \sin 2x dx$$

$$7. \int \sin \sqrt[3]{x} dx$$

$$2. \int x \arctan x dx$$

$$8. \int \frac{\arctan x dx}{x^2(x^2 + 1)}$$

$$3. \int x \cos^3 x dx$$

$$9. \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

$$4. \int (x^2 + 1)e^{-2x} dx$$

$$5. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$$

$$10. \int \sin(\ln x) dx$$

$$6. \int e^{-2x} \cos 3x dx$$

**Bài 8.4** Tính các tích phân:

$$1. \int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

$$2. \int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{1+x}}$$

$$7. \int_1^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9 dx}{(1 + x^5)^3}$$

$$3. \int_{\ln 3}^0 \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx$$

$$8. \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1}$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$$

$$9. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$$

$$5. \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}$$

$$10. \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x \sqrt{1 - x^2}}$$

**Bài 8.5** Tính các tích phân sau:

$$1. \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$2. \int_1^2 x \log_2 x dx$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos 2x dx$$

$$4. \int_{-1}^1 x \arctan x dx$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$6. \int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{a^2 + x^2}}$$

$$7. \int_{0,5}^1 (\arcsin x)^4 dx$$

$$8. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$$

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx$$

$$10. \int_1^{16} \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx$$

**Bài 8.6** Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng

$$1. \int_{-\infty}^0 x e^x dx$$

$$9. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$$

$$2. \int_0^{+\infty} \cos x dx$$

$$10. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$3. \int_0^{+\infty} \left( \frac{1+x}{1+x^2} \right)^2 dx$$

$$11. \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$12. \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$5. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$13. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$6. \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

$$14. \int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$7. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

$$15. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$8. \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$16. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$17. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

$$20. \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$$

$$18. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$$

$$21. \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},$$

$(a < b)$

$$19. \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

$$22. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x + 2\sqrt{x} + 1)}$$

### ĐÁP SỐ

#### Bài 8.1

$$1. \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{x^4 - 1}) + C$$

$$2. 2\sqrt{3x+5} + \sqrt{5} \ln \frac{|\sqrt{5} - \sqrt{3x+5}|}{\sqrt{5} + \sqrt{3x+5}} + C$$

$$3. \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

$$4. -\frac{1}{2} \ln(\cos^2 2x + 4) + C$$

$$5. 4 \left[ \frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} + \frac{\sqrt{x}}{3} - \sqrt[4]{x} - \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{x}) + \arctan \sqrt[4]{x} \right] + C$$

$$6. 6 \left[ \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} - \frac{\sqrt{x}}{3} + \sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x} \right] + C$$

$$7. \frac{(4-x^2)^2 \sqrt{4-x}}{5} - \frac{4(4-x^2) \sqrt{4-x}}{3} + C$$

$$8. 2 \arcsin \sqrt{x} + C$$

$$9. \bullet -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin \frac{1}{x} + C \text{ nếu } x > 1$$

$$\bullet \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin \frac{1}{x} + C \text{ nếu } x < -1$$

$$10. \frac{\ln^2(\tan x)}{2} + C$$

#### Bài 8.2

1.  $\ln |\sin x| - \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{4} + C$
2.  $-\cotan x - \frac{2 \cotan^3 x}{3} - \frac{\cotan^5 x}{5} + C$
3.  $\frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C$
4.  $\frac{1}{2} \left( \arccos \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \right) + C$
5.  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$
6.  $-\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$
7.  $-\frac{(9-x^2)^2 \sqrt{9-x^2}}{45x^5} + C$
8.  $\frac{1}{4\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x\sqrt{15} + 2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15} - 2\sqrt{4x^2+1}} \right| + C$
9.  $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + C$
10.  $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + C$

### Bài 8.3

1.  $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2} \cos 2x + C$
2.  $\frac{x^2+1}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + C$
3.  $\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3} (x \sin 3x + \cos 3x) + 3(x \sin x + \cos x) \right] + C$
4.  $-\frac{2x^2+2x+3}{4e^{2x}} + C$
5.  $\ln \left| \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{x} \right| - \frac{\arcsin x}{x} + C$

6.  $\frac{1}{13}e^{-2x}(3 \sin 3x - 2 \cos 3x) + C$
7.  $3\left[(2 - \sqrt[3]{x^2}) \cos \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x}\right] + C$
8.  $\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\arctan x}{x} - \frac{(\arctan x)^2}{2} + C$
9.  $\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C$
10.  $\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right] + C$

#### Bài 8.4

- |  |                                  |
|--|----------------------------------|
| 1. $\frac{5}{3} - 2 \ln 2$                     | 6. $\frac{2 - \sqrt{2}}{3}$      |
| 2. $3\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right)$        | 7. $\frac{2}{45}$                |
| 3. $\ln \frac{4}{3}$                           | 8. $1 + \ln 2$                   |
| 4. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$                     | 9. $4 - \pi$                     |
| 5. $\ln \frac{e + \sqrt{1+e^2}}{1 + \sqrt{2}}$ | 10. $\ln \frac{2 + \sqrt{3}}{3}$ |

#### Bài 8.5

- |                                  |  |
|----------------------------------|--|
| 1. $\frac{e-2}{e}$               | 6. $\frac{141a^3\sqrt[3]{a}}{20}$  |
| 2. $2 - \frac{3}{2 \ln 2}$       | 7. $\frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24$                                      |
| 3. $\frac{e^\pi - 2}{5}$         | 8. $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}$ |
| 4. $\frac{\pi}{2} - 1$           | 9. $\frac{\pi}{2^{n+1}}$   |
| 5. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ | 10. $\frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}$  |

### Bài 8.6

1.  $x = 2$

2. Phân kì

3.  $1 + \frac{\pi}{2}$

4.  $\frac{\pi}{2}$

5.  $\frac{1}{2}$

6.  $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$

7. 2

8. Phân kì

9. Phân kì

10.  $\frac{\pi}{2}$

11.  $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

12.  $\frac{\pi}{2}$

13.  $\frac{\pi^2}{8}$

14.  $\frac{256}{15}$

15.  $\pi$

16.  $\frac{\pi}{2} - 1$

17.  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

18.  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

19. Phân kì

20. 2

21.  $\pi$

22. Hội tụ.



# Chương 9

## Phương trình vi phân

### BÀI TẬP

**Bài 9.1** Giải các phương trình có biến phân li

$$1. y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$$

$$2. \frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$3. y' = \sin(x-y) - \sin(x+y)$$

$$4. \frac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \frac{3y+2}{x+1}y'$$

$$5. y' = \frac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x - 1}$$

$$6. xydx + (x+1)dy = 0$$

$$7. 2x^2yy' + y^2 = 2$$

$$8. \sqrt{y^2+1}dx = xydy$$

$$9. x^2y^2y' + 1 = y$$

**Bài 9.2** Tìm nghiệm riêng của các phương trình:

$$1. \begin{cases} (x-1)e^{1+x^2} \tan y dx - e^{2x} dy = 0 \\ y|_{x=1} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y) \\ y|_{x=0} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0 \\ y|_{x=1} = 1 \end{cases}$$

$$4. xy' + y = y^2 \ln x \text{ với } y|_{x=1} = 1.$$

**Bài 9.3** Tìm tích phân tổng quát:

$$1. y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$2. xy' \ln \frac{y}{x} = x + y \ln \frac{y}{x}$$

$$3. y' = \frac{-x - y + 2}{x - y + 4}$$

$$4. (y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$$

$$5. xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$$

$$6. (x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$$

**Bài 9.4** Giải các phương trình:

$$1. y' = \frac{2x}{1 + x^2}y$$

$$2. y' + y = 4x$$

$$3. y' + 2xy = x.e^{-x^2}$$

$$4. y' - y \sin x = \sin x \cos x$$

$$5. y' + \frac{xy}{1 - x^2} = \arcsin x + x$$

$$6. y' = 2x(x^2 + y)$$

$$7. xy' - 2y = 2x^4$$

$$8. y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x, \quad y|_{x=0} = 0$$

$$9. y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, \quad y|_{x=e} = \frac{1}{2}e^2$$

**Bài 9.5** Giải phương trình

$$1. y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$$

$$2. y dx + (x + x^2 y) dy = 0, \quad y|_{x=1/2} = 1$$

$$3. y' + y = e^x \sqrt{y}, \quad y|_{x=0} = 4$$

**Bài 9.6** Giải các phương trình

$$1. y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$2. y'' = \frac{y'}{x} + x$$

$$3. y'' = x e^{-x}, \quad y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$$

$$4. y'' - \frac{y'}{x-1} - x(x-1) = 0, \quad y|_{x=2} = 1, y'|_{x=2} = -1$$

$$5. (y'')^2 = y'$$

$$6. y y'' - y'^2 = 0$$

$$7. y'' = 2y y'$$

$$8. y''(e^x + 1) + y' = 0$$

**Bài 9.7** Giải các phương trình

$$1. y'' - 2y' - y = 0$$

$$2. y'' - 9y = e^{3x} \cos x$$

$$3. 4y'' - 20y' + 25y = 0$$

$$4. y'' - 4y' = -12x^2 - 6x - 4$$

$$5. y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$$

$$6. y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^x$$

$$7. y'' - y = 2 \sin x - 4 \cos x$$

8.  $y'' - 4y = e^x [(-4x + 4) \cos x - (2x + 6) \sin x]$
9.  $y'' + y = \cos x + \cos 2x$
10.  $y'' - y = 2e^x - x^2$

### Phần phụ lục

**Bài 9.8** Viết các số phức sau dưới dạng  $a + bi$

1.  $(2 + i)(-1 + i)(1 + 2i)^2$
2.  $(1 + i\sqrt{3})^2$
3.  $\frac{1 - 3i}{3 - i}$

**Bài 9.9** Đưa các số phức sau về dạng lượng giác

- |         |                                       |
|---------|---------------------------------------|
| 1. 1    | 5. $1 + i\sqrt{3}$                    |
| 2. -1   | 6. $-1 + i\sqrt{3}$                   |
| 3. $i$  | 7. $-\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$ |
| 4. $-i$ | 8. $2 + \sqrt{3} + i$                 |

**Bài 9.10** Tính

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| 1. $\sqrt{2i}$     | 4. $\sqrt{-15 + 8i}$ |
| 2. $\sqrt{-8i}$    |                      |
| 3. $\sqrt{3 - 4i}$ | 5. $\sqrt[4]{-i}$    |

**Bài 9.11** Giải phương trình phức, viết nghiệm dưới dạng  $a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

1.  $x^2 + x + 1 = 0$
2.  $x^2 - (2 + i)x + 7i - 1 = 0$
3.  $x^2 - (3 - 2i)x + 5 - 5i = 0$
4.  $8z^2 - 4\sqrt{2}iz - 1 - 2i = 0$

5.  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

## ĐÁP SỐ

### Bài 9.1

1.  $\frac{1}{2} \ln^2 y = \ln \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C$

2.  $(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 - \sqrt{1 - y^2}) = Cxy$

3.  $2 \sin x + \ln \left| \tan \frac{y}{2} \right| = C$

4.  $\frac{3}{2} \ln(y^2 + 4) + \arctan \frac{y}{2} =$   
 $\sqrt{x^2 + 4x + 13} - \ln(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 13}) + C$

5.  $\tan \frac{y}{2} = C \left( \tan \frac{y}{2} + 1 \right) \left( 1 - \tan \frac{x}{2} \right)$

6.  $y = C(x + 1)e^{-x}, x = -1$

7.  $y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}$

8.  $\ln |x| = C + \sqrt{y^2 + 1}$

9.  $\frac{y^2}{2} + y + \ln |y - 1| = -\frac{1}{x} + C$

### Bài 9.2

1.  $2 \ln |\sin y| = e^{(x-1)^2} - 1$

2.  $\ln |\tan y| = 4(1 - \cos x)$

3.  $x + y + 2 \ln x - \ln y = 2$

4.  $\frac{1}{y} = Cx + \ln x + 1$

### Bài 9.3

1.  $x^2 + y^2 = Cy$

2.  $\ln x = \frac{y}{x} \left( \ln \frac{y}{x} - 1 \right) + C$

$$3. x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$$

$$4. x(y - x) = Cy; y = 0$$

$$5. y = -\ln \ln cx$$

$$6. (y - x + 5)^5(x + 2y - 2) = C$$

#### Bài 9.4

$$1. y = C(1 + x^2)$$

$$3. y = e^{-x^2} \left( C + \frac{x^2}{2} \right)$$

$$2. y = Ce^{-x} + 4x - 4$$

$$4. y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$$

$$5. y = \sqrt{1 - x^2} \left[ \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 - \sqrt{1 - x^2} + C \right]$$

$$6. y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$$

$$7. y = Cx^2 + x^4$$

$$8. y = e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$$

$$9. y = \frac{1}{2} x^2 \ln x$$

#### Bài 9.5

$$1. y = \frac{1}{x \sqrt[3]{3 \ln \frac{C}{x}}}; y = 0.$$

$$2. \text{NTQ: } x = \frac{1}{y(\ln |y| + C)}; x = 0; y = 0 \text{ (giải } x \text{ theo } y)$$

$$\text{NR: } x = \frac{1}{y(2 + \ln |y|)}$$

$$3. 3\sqrt{y} = 5e^{-\frac{x}{2}} + e^x.$$

#### Bài 9.6

$$1. y = -\frac{1}{18} \sin 3x - \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$2. y = C_1 x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}$$

3.  $y = (x + 2)e^{-x} + 3x - 1$
4.  $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x + 1$
5.  $y = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2$
6.  $y = C_1e^{C_2x}$
7.  $x = C + \int \frac{dy}{y^2 + D}$
8.  $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$

### Bài 9.7

1.  $y = C_1e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$
2.  $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + e^{3x} \left( \frac{6}{37} \sin x - \frac{1}{37} \cos x \right)$
3.  $y = (C_1 + C_2x)e^{25x}$
4.  $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + C_1 + C_2e^{4x}$
5.  $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}$
6.  $y = C_1e^x + C_2e^{4x} + \left(-\frac{4}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x\right)e^x$
7.  $-\sin x + 2 \cos x + C_1e^x + C_2e^{-x}$
8.  $e^{-x}(x \cos x + \sin x) + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$
9.  $y = \frac{1}{2}x \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$
10.  $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$

### Bài 9.8

1.  $5 - 15i$
2.  $-2 + 2\sqrt{3}i$
3.  $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

### Bài 9.9

1.  $\cos 0 + i \sin 0$

2.  $\cos \pi + i \sin \pi$

3.  $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

4.  $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

5.  $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

6.  $2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

7.  $\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$

8.  $(\sqrt{2} + \sqrt{6})\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$

### Bài 9.10

1.  $\pm(1 + i)$

2.  $\pm(2 - 2i)$

3.  $\pm(2 - i)$

4.  $\pm(1 + 4i)$

5.  $\frac{\sqrt{2}(\pm 1 \pm i)}{2}$

### Bài 9.11

1.  $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2.  $3 - i; -1 + 2i$

3.  $2 + i; 1 - 3i$

4.  $\frac{-\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

5.  $-2 \pm 3i; 2 \pm 3i$



# Chương 10

## Phương trình sai phân

### BÀI TẬP

**Bài 10.1** Tìm nghiệm tổng quát

1.  $x(n+1) - 3x(n) = 0$
2.  $2x(n+1) + x(n) = 0$
3.  $x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 0$
4.  $3x(n+2) + 2x(n+1) - x(n) = 0$
5.  $x(n+3) - x(n+2) + 2x(n+1) + 4x(n) = 0$
6.  $x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 10x(n) = 0$
7.  $x(n+3) - 6x(n+2) + 12x(n+1) - 7x(n) = 0$
8.  $x(n+2) + 2x(n+1) + 4x(n) = 0$
9.  $x(n+2) + 4x(n+1) + 8x(n) = 0$

**Bài 10.2** Tìm nghiệm riêng thoả mãn điều kiện ban đầu

1.  $x(n+1) - 3x(n) = 0$  với  $x(0) = -1$
2.  $x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 0$  với  $x(0) = 1; x(1) = -1$
3.  $x(n+3) + 3x(n+2) + 3x(n+1) + x(n) = 0$  với  $x(0) = 1; x(-1) = 2; x(-2) = -2$

**Bài 10.3** Giải phương trình bằng phương pháp chọn

1.  $x(n+1) - 4x(n) = 3n^2 - 8n - 1$
2.  $x(n+1) + 3x(n) = (-3)^n 3n$
3.  $2x(n+1) - x(n) = 2^{-n+3}(n+1)$
4.  $2x(n+1) - x(n) = 4^{-n}(n^2 + n - 1)$
5.  $x(n+1) - 3x(n) = 5 \cdot 2^{n+1} \cos n \frac{\pi}{2}$
6.  $x(n+1) + 5x(n) = 6n^2 - 4n + 12$
7.  $x(n+1) = 3x(n) + 2^n(4 - n)$
8.  $x(n+1) = 2x(n) + \cos n \frac{\pi}{2} - 3 \sin n \frac{\pi}{2}$
9.  $x(n+1) - 6x(n) = 12 \cdot 6^n + 3 \cdot 7^n$

**Bài 10.4** Giải bằng phương pháp biến thiên hằng số

1.  $x(n+1) = (n+1)x(n) + (n+1)!$
2.  $x(n+1) + nx(n) = n!$
3.  $x(n+1) - 9^n x(n) = 3^{n^2+2n}$
4.  $x(n+1) + \frac{n}{3}x(n) = \frac{n!}{3^n}$
5.  $x(n+1) = \frac{n}{2}x(n) + \frac{n!}{2^{n+1}}$
6.  $x(n+1) - 4^{-n}x(n) = n2^{-n^2-n}$
7.  $x(n+1) - nx(n) = n! \ln(n+1)$
8.  $x(n+1) - e^{2n}x(n) = e^{n^2+n} \ln(n+1)$

**Bài 10.5** Giải phương trình (\*)

1.  $x(n+1) - 5x(n) = 5^n nn!$
2.  $x(n+1) - 3x(n) = 3^{n+1}(n+1)^2$
3.  $x(n+1) - 4x(n) = 4^{n+1} \sin \frac{(n+1)\pi}{6}$
4.  $x(n+1) - \frac{1}{5}x(n) = \frac{1}{5^n(n+2)(n+1)}$

$$5. x(n+1) - 2x(n) = \frac{2^{n+2}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$6. x(n+1) - 4^n x(n) = 2^{n^2+n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$7. x(n+1) - nx(n) = n!n^2$$

**Bài 10.6** Tìm nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu

$$1. x(n+1) - 3x(n) = n3^{n+1} \text{ với } x(0) = 5$$

$$2. x(n+1) - 3x(n) = 3^n \sin n \frac{\pi}{4} \text{ với } x(1) = 0$$

**Bài 10.7** Giải phương trình

$$1. x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 2n + 5$$

$$2. x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 2n + 3$$

$$3. x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 4n3^n$$

$$4. x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 5^n(9n + 3)$$

$$5. x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 16 \cdot 2^n + 18 \cdot 5^n$$

$$6. x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = \cos n \frac{\pi}{2} + 12 \sin n \frac{\pi}{2}$$

$$7. x(n+2) - 2x(n+1) + 4x(n) = 14 \cdot 3^n$$

$$8. x(n+2) + x(n) = 6 \cos n \frac{\pi}{2} - 4 \sin n \frac{\pi}{2}$$

$$9. x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 2n + 1 + 2^{n+2}$$

**Bài 10.8** Tìm nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu

$$1. x(n+2) - 4x(n+1) + 3x(n) = 85^n \text{ với } x(0) = 4; x(1) = 11$$

$$2. x(n+2) + 9x(n) = \cos n \frac{\pi}{2} \text{ với } x(0) = 3; x(1) = 8$$

**Bài 10.9** Tính tổng:

$$1. S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$2. S_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$$

$$3. S_3 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2n-1)(2n+1)$$

4.  $S_4 = 0.2 + 2.4 + \dots + 2n.2(n+1)$
5.  $S_5 = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha$
6.  $S_6 = 1^2.3^1 + 2^2.3^2 + 3^2.3^3 + \dots + n^2.3^n$

### ĐÁP SỐ

**Bài 10.1** 1.  $x(n) = C3^n$

2.  $x(n) = C(-\frac{1}{2})^n$

3.  $x(n) = C_1 + C_22^n$

4.  $x(n) = C_1(-1)^n + C_23^{-n}$

5.  $x(n) = C_1(-1)^n + 2^n(C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3})$

6.  $x(n) = C_1 + (\sqrt{10})^n(C_2 \cos n\phi + C_3 \sin n\phi)$ ; ( $\cos \phi = 3/\sqrt{10}$ ,  $\sin \phi = 1/\sqrt{10}$ )

7.  $x(n) = C_1 + (\sqrt{7})^n(C_2 \cos n\phi + C_3 \sin n\phi)$ ; ( $\cos \phi = 5/2\sqrt{7}$ ;  $\sin \phi = \sqrt{3}/2\sqrt{7}$ )

8.  $x(n) = 2^n(C_1 \cos \frac{n2\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n2\pi}{3})$

9.  $x(n) = 8^{\frac{n}{2}}(C_1 \cos n\frac{3\pi}{4} + C_2 \sin n\frac{3\pi}{4})$

**Bài 10.2** 1.  $x(n) = -3^n$

2.  $x(n) = 3 - 2^{n+1}$

3.  $x(n) = (1 + 9n/2 + 3n^2/2)(-1)^n$

**Bài 10.3** 1.  $x(n) = C4^n - n^2 + 2n + \frac{2}{3}$

2.  $x(n) = (-3)^n(C + n/2 - n^2/2)$

3.  $x(n) = 2^{-n}(C + 4n^2 + 4n)$

4.  $x(n) = C2^{-n} - 4^{-n}(2n^2 + 6n + 6)$

5.  $x(n) = C_13^n + 2^n(-\frac{30}{13} \cos n\frac{\pi}{2} + \frac{20}{13} \sin n\frac{\pi}{2})$

6.  $x(n) = C(-5)^n + n^2 - n + 12/5$

$$7. x(n) = C3^n + 2^n(n - 2)$$

$$8. x(n) = C2^n + \frac{7}{5} \cos n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin n\frac{\pi}{2}$$

$$9. x(n) = C6^n + 2n6^n + 3.7^n$$

**Bài 10.4** 1.  $x(n) = (n + C)n! (C := x(0))$

2.  $x(n) = (-1)^{n-1}(n - 1)!(C - 1)$  khi  $n$  chẵn.  
 $x(n) = (-1)^{n-1}(n - 1)!C$  khi  $n$  lẻ.

3.  $x(n) = (C + 3^n/2 - 1/2)3^{n^2+n}$

4.  $x(n) = C(-1)^{n-1}(n - 1)!3^{1-n}$  khi  $n$  lẻ.  
 $x(n) = (C - 1)(-1)^{n-1}(n - 1)!3^{1-n}$  khi  $n$  chẵn.

5.  $x(n) = 2^{-n}(n - 1)!(C + n)$

6.  $x(n) = 2^{n-n^2}[C + n(n - 1)/2]$

7.  $x(n) = (n - 1)![C + \ln n!]$

8.  $x(n) = (C + \ln n!)e^{n^2-n}$

**Bài 10.5** 1.  $x(n) = [C + (n! - 1)/5]5^n$

2.  $x(n) = 3^n[C + n(n + 1)(2n + 1)/6]$

3.  $x(n) = 4^n[C + \frac{1}{\sqrt{3-2}} \cos \frac{n\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{6}]$

4.  $x(n) = 5^{-n}[C + \frac{5n}{(n+1)}]$

5.  $x(n) = 2^n[C - \frac{1}{(n+2)(n+1)}]$

6.  $x(n) = 2^{n^2-n}[C + \sin(n\pi/2) + \cos(n\pi/2)]$

7.  $x(n) = (n - 1)![C + \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6}]$

**Bài 10.6** 1.  $x(n) = 3^n[5 + n(n - 1)/2]$

2.  $x(n) = 3^{n-1}[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \sin \frac{n\pi}{8} \sin \frac{(n+1)\pi}{8}]$

**Bài 10.7** 1.  $x(n) = C_12^n + C_23^n + n + 4$

2.  $x(n) = C_1 + C_2 2^n - n^2 - 4n$
3.  $x(n) = C_1 + C_2 2^n + (2n - 9)3^n$
4.  $x(n) = C_1 2^n + n C_2 2^n + 5^n(n - 3)$
5.  $x(n) = C_1 2^n + n C_2 2^n + 2 \cdot 5^n + 2n^2 \cdot 2^n$
6.  $x(n) = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{13}{10} \cos n \frac{\pi}{2} + \frac{11}{10} \sin n \frac{\pi}{2}$
7.  $x(n) = 2^n (C_1 \cos n \frac{\pi}{3} + C_2 \sin n \frac{\pi}{3}) + 2 \cdot 3^n$
8.  $x(n) = C_1 \cos n \frac{\pi}{2} + C_2 \sin n \frac{\pi}{2} - 3n \cos n \frac{\pi}{2} + 2n \sin n \frac{\pi}{2}$
9.  $x(n) = C_1 + C_2 2^n - n^2 - 2n + 2n \cdot 2^n$

**Bài 10.8** 1.  $x(n) = 3/2 + 3^{n+1}/2 + 5^n$

2.  $x(n) = 3^n (\frac{23}{8} \cos n \frac{\pi}{2} + \frac{8}{3} \sin n \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{8} \cos n \frac{\pi}{2}$

**Bài 10.9** 1.  $S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2.  $S_2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3.  $S_3 = (n+1)^3/3 - (n+1)^2/2 - 5(n+1)/6 - 1$

4.  $S_4 = \frac{n(n+1)(4n+5)}{3}$

5.  $S_5 = \sin(n\alpha/2) \sin((n+1)\alpha/2) / \sin(\alpha/2)$

6.  $S_6 = 3^{n+1}(n^2 - n + 1)/2 - 3/2$